Matemática Discreta → BIA (Bacharelado em Inteligência Artificial) / Prof. Cicero C. Quarto - cicero@engcomp.uema.br } 03/06/26

▸ Funções:

① DEFINIÇÃO 1: Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função f de A para B é uma determinação de exatamente um elemento de B para cada elemento de A. Escrevemos $f(a) = b$ se b for o único elemento de B determinado pela função f para o elemento de A. Se f é uma função de A para B, escrevemos $f: A \to B$.

Nota do autor) As funções são também chamadas de mapeamentos ou transformações.

As funções são especificadas em muitos casos. Às vezes, constatamos explicitamente as determinações, como na Figura 1. Normalmente damos uma fórmula, como $f(x) = x + 1$, para definir uma função. Outras vezes, usamos um programa de computação para especificar uma função.

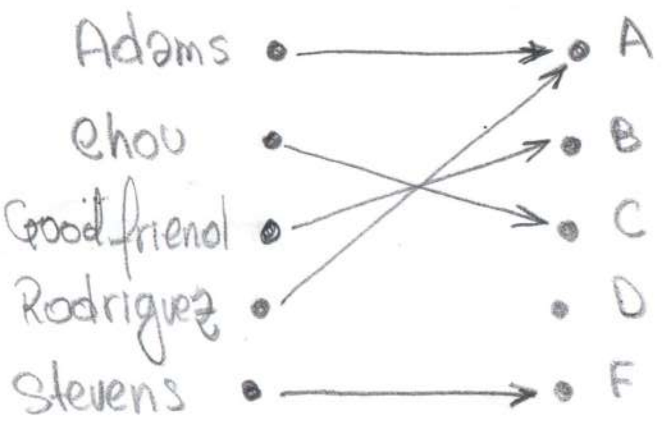


Figura 1: Determinação de Notas em uma Sala de Matemática Discreta

DEFINIÇÃO 2: Se f é uma função de A para B, dizemos que A é o domínio de f e B é o contradomínio de f. Se $f(a) = b$, dizemos que b é a imagem de a e a é a imagem inversa de b. A imagem de f é o conjunto com todas as imagens dos elementos de A. Além disso, se f é uma função de A para B, dizemos que f mapeia A para B. A Figura 2 representa uma função f de A para B.

→ → →

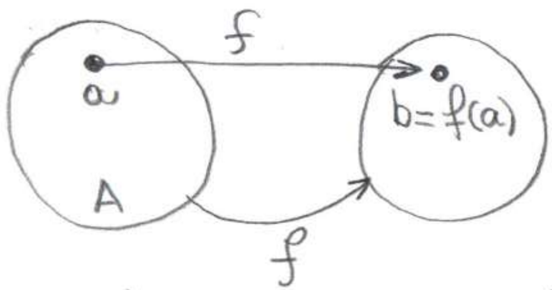


Figura 2: A Função f Mapeia A para B.

Nota: Quando definimos uma função, especificamos seu domínio, seu contradomínio e o mapeamento dos elementos no domínio e no contradomínio.

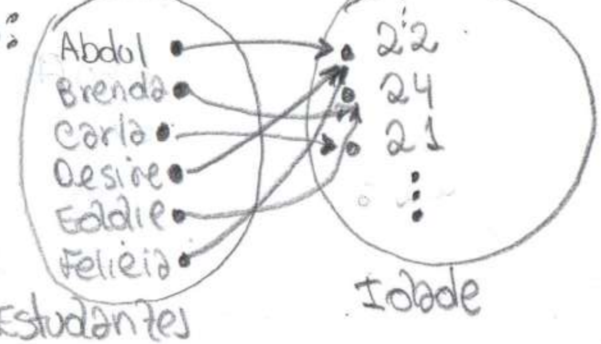
nota 2 → Se trocarmos o domínio ou o contradomínio de uma função, então obteremos uma função diferente.

EXEMPLO 1: Qual é o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função que determina as notas dos estudantes trazidas através da Figura 1.

Solução: Considere G como a função que determina uma nota para um estudante na sala de Matemática Discreta. Note que G(Adams) = A, por exemplo. O domínio de G é o conjunto {Adams, Chou, Goodfriend, Rodriguez, Stevens} e o contradomínio é o conjunto {A, B, C, D, F}. O conjunto Imagem de G é o conjunto {A, B, C, F}, pois cada nota, exceto D, é designada a algum estudante.

EXEMPLO 2: Considere R como a relação dos pares ordenados (Abdul, 22), (Brenda, 24), (Carla, 21), (Desire, 22), (Eddie, 24) e (Felicia, 22), em que cada par é formado por um estudante e por sua idade. Qual é a função que essa relação determina?

Solução:



Idade = f(Estudante)

22 = f(Abdul) = f(Desire) = f(Felicia)

21 = f(Carla)

24 = f(Brenda) = f(Eddie)

D = {Abdul, Brenda, Carla, Desire, Eddie, Felicia}

CD = $\mathbb{Z}^+$

Im = {21, 22, 24}

→

EXEMPLO 3: Considere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como a função que determina o quadrado de um número inteiro para este inteiro. Então $f(x) = x^2$, em que o domínio de f é conjunto de todos os inteiros, o contradomínio de f, todos os números inteiros, e o conjunto imagem de f, o conjunto de todos os inteiros que são quadrados perfeitos, ou seja, $\{0, 1, 4, 9, \ldots, \infty\}$.

DEFINIÇÃO 3: Sejam f_1 e f_2 funções de A para $\mathbb{R}$. Então, $f_1 + f_2$ e $f_1 \cdot f_2$ também são funções de A para $\mathbb{R}$ definidas por

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Observação

- Note que as funções $f_1 + f_2$ e $f_1 \cdot f_2$ foram definidas especificando seus valores em x em termos de valores de f_1 e f_2 em x.

EXEMPLO 4: Considere f_1 e f_2 como funções de R a R, tal que $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x - x^2$. Quais são as funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$?

Solução:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + x - x^2 = x \therefore \boxed{[f_1 + f_2](x) = x}$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = x^2 (x - x^2) = x^3 - x^4 \therefore \boxed{(f_1 \cdot f_2)(x) = x^3 - x^4}$$

DEFINIÇÃO 4: Seja f uma função do conjunto A para o conjunto B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sob a função f é o subconjunto de B que é formado pelas imagens dos elementos de S. Indicamos a imagem de S por $f(S)$, então

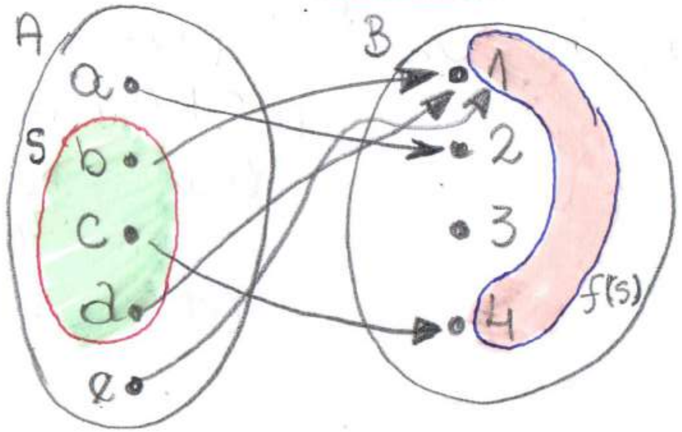
$$f(S) = \{t \mid \exists s \in S\,(t = f(s))\}.$$

Usamos também a notação abreviada $\{f(s) \mid s \in S\}$ para indicar tal conjunto.

Nota do autor: A notação $f(S)$ para a imagem do conjunto S sob a função f é potencialmente ambígua. Aqui, $f(S)$ indica um conjunto e não o valor da função f para o conjunto S.

EXEMPLO 5: Considere $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$

MODELAGEM GRÁFICA DA SOLUÇÃO



Matemática Discreta: BIA (Bacharelado em Inteligência Artificial)
Departamento de Engenharia de Computação

FUNÇÕES → Cont...

Funções Injetoras e Sobrejetoras

DEFINIÇÃO 5: Uma função f é chamada de injetora, ou um para um, se e somente se $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para todos os a e b no domínio de f. Uma função pode ser chamada de injeção se for de um para um.

Lembrete: Podemos expressar que f é injetora usando quantificadores como $\forall a \forall b (f(a) = f(b) \rightarrow a = b)$ ou, equivalentemente, $\forall a \forall b (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$, em que o universo do discurso é o domínio da função.

EXEMPLO 1: Determine se a função f de $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ e $f(d) = 3$ é injetora.

Solução: A função f é injetora, pois f assume diferentes valores para os quatro elementos no seu domínio. Isso é ilustrado na Figura 1.

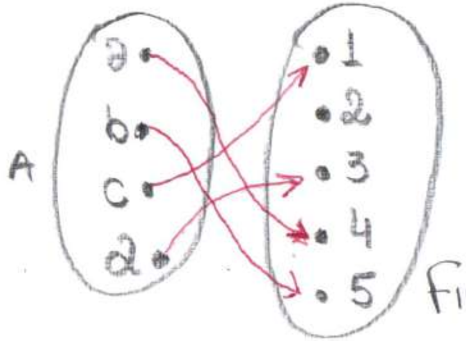


Figura 1: Ilustração que a função f é injetora.

EXEMPLO 2: Determine se a função $f(x) = x^2$ do conjunto de números inteiros para o conjunto de números inteiros é injetora.

Solução:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

A função $f(x) = x^2$ não é injetora, porque, por exemplo, $f(1) = f(-1) = 1$, mas $1 \neq -1$.

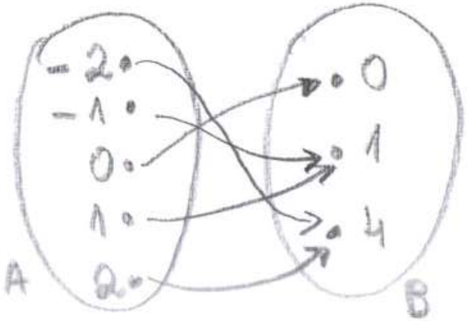


Figura 2: A função $f(x) = x^2$ não é injetora, pois não é um para um.

Nota do Autor: Note que a função $f(x) = x^2$ com o domínio restrito a $\mathbb{Z}^+$ é injetora. Tecnicamente, quando restringimos o domínio de uma função, obtemos uma nova função cujos valores concordam com aqueles da função original para os elementos do domínio restrito.

EXEMPLO 3: Determine se a função $f(x) = x + 1$ do conjunto de números reais para ele mesmo é injetora.

Solução: A função $f(x) = x + 1$ é uma função injetora.

DEFINIÇÃO 6: Uma função f de A para B é chamada de Sobrejetora ou Sobrejetiva, se e somente se para todo elemento $b \in B$ houver um elemento $a \in A$ com $f(a) = b$.

Nota do Autor: Uma função f é sobrejetora ou sobrejetiva se $\forall y \exists x (f(x) = y)$, em que o domínio para x é o domínio da função e o domínio para y é o contradomínio da função.

EXEMPLO 4: Considere f como a função de $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3\}$ definida por $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função sobrejetora ou sobrejetiva?

SOLUÇÃO: Pelo fato de todos os três elementos do contradomínio serem imagem de elementos no domínio, vemos que f é sobrejetiva. Isso é ilustrado na Figura 3. Note que se o contradomínio fosse $\{1, 2, 3, 4\}$, então f não seria sobrejetiva.

ILUSTRAÇÃO GRÁFICA

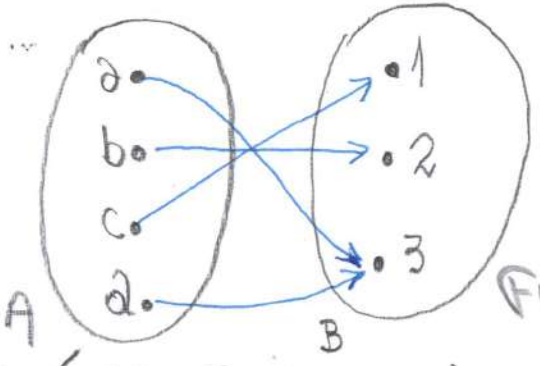
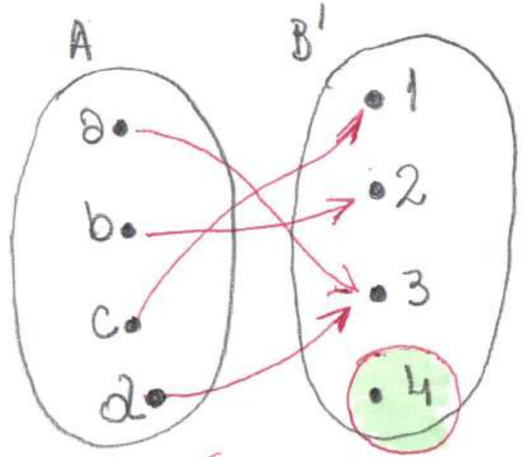


Figura 3

É FUNÇÃO SOBREJETIVA



NÃO É FUNÇÃO SOBREJETIVA

EXEMPLO 5: A função $f(x)=x^2$ a partir do conjunto de números inteiros para o conjunto dos números inteiros é sobrejetiva?

Solução: $f(x)=x^2$

$D=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

A função f não é sobrejetiva porque não há número inteiro x com $x^2=-1$, por exemplo

EXEMPLO 6: A função $f(x)=x+1$ do conjunto de números inteiros para o conjunto dos números é sobrejetivo?

Solução: Essa função é sobrejetiva, porque para cada número inteiro y há um número inteiro x, tal que $f(x)=y$. Para ver isso, note que $f(x)=y$ se e somente se $x+1=y$, que se mantém se e somente se $x=y=-1$.

$\vdots$

$f(x)=x+1$

$f(-2)=-2+1=-1$

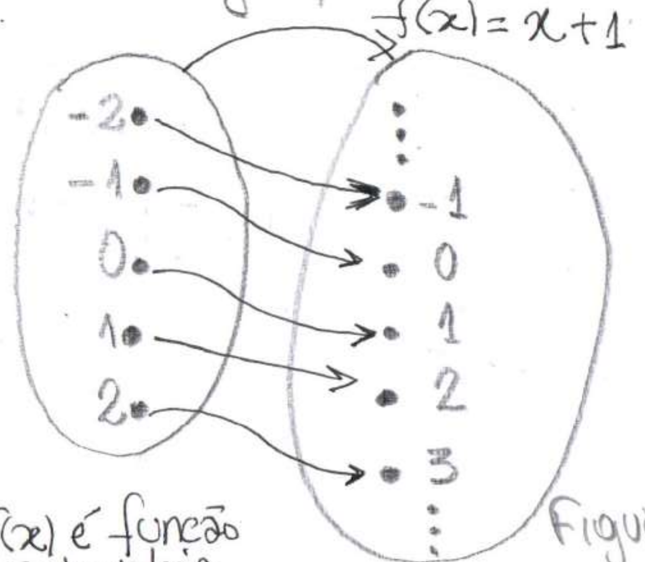
$f(-1)=-1+1=0$

$f(0)=0+1=1$

$f(1)=1+1=2$

$f(2)=2+1=3$

$\vdots$



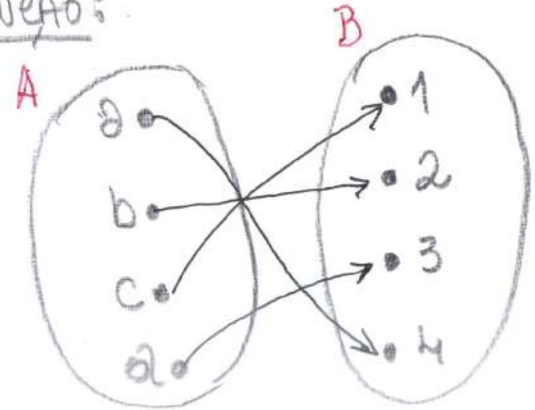
f(x) é função sobrejetiva.

Figura 4

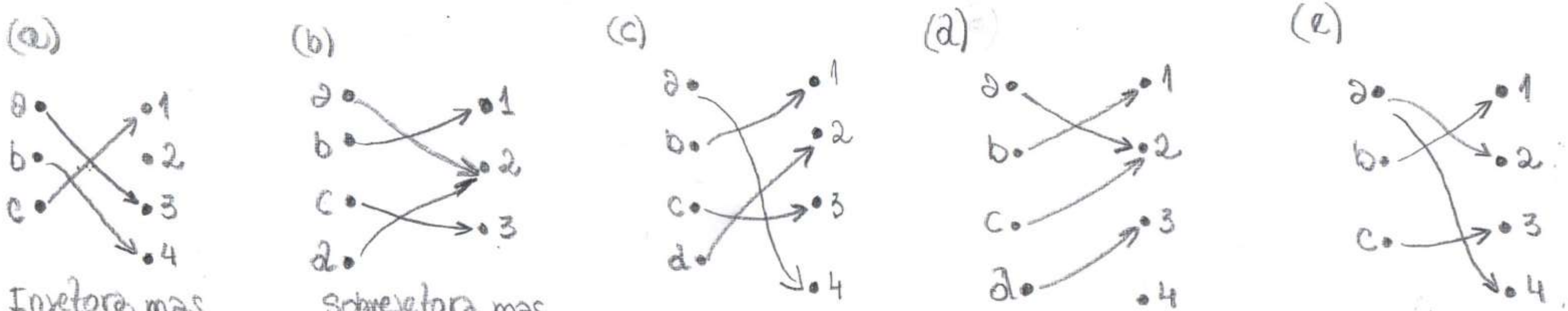
DEFINIÇÃO 7: A função f é bijetora, ou é uma correspondência um para um, se for injetora e sobrejetora.

EXEMPLO 7: Considere f como a função de $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a)=4$, $f(b)=2$, $f(c)=1$ e $f(d)=3$. A função f é bijetora?

SOLUÇÃO:



A função f é injetora e sobrejetora (ou sobrejetiva). É injetora porque dois valores do domínio não têm a mesma imagem. É sobrejetiva porque todos os quatro elementos do contradomínio são imagens de elementos no domínio. Assim, f é uma bijetora. A Figura 5 traz diversas funções com suas respectivas denominações.



(a) Injetora, mas não sobrejetora

(b) Sobrejetora, mas não injetora

(c) Injetora e sobrejetora

(d) Nem injetora, nem sobrejetora

(e) Não é função.