Matemática Discreta
Estruturas Básicas: Conjuntos

Cícero C. Quarto
Universidade Estadual do Maranhão
Departamento de Engenharia de Computação
https://cicero.engcomp.uema.br

2 de junho de 2026

Conteúdos

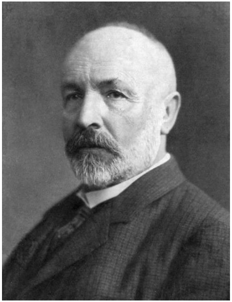
Introdução

- [Ros09] pontua que os conjuntos é a estrutura discreta sob a qual todas as outras estruturas discretas (*funções*, *sequências*, *somatórios*, *matrizes*, *grafos* e *árvores*) são construídas, sendo usados para agrupar objetos.
  - Geralmente, os objetos de um conjunto têm propriedades semelhantes. Por exemplo, todos os estudantes que são inscritos em uma faculdade formam um conjunto. Da mesma forma, todos os estudantes que assistem ao curso de matemática discreta em qualquer faculdade formam um conjunto.
    - Além disso, aqueles estudantes inscritos em sua faculdade que estão cursando matemática discreta formam um conjunto que pode ser obtido a partir dos elementos comuns dos dois primeiros conjuntos.

DEFINIÇÃO 1

Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos .

Note que o termo *objeto* foi usado sem especificar o que é um objeto. Essa descrição de um conjunto como uma coleção de objetos, baseada em uma noção intuitiva, foi expressa pela primeira vez pelo matemático alemão George Cantor em 1895).



Introdução

Os objetos no conjunto são chamados de *elementos*, ou *membros*, do conjunto. Diz-se que os elementos pertecem ao conjunto.

- Introduziremos agora a notação usada para descrever pertinência em conjuntos. Escrevemos $a \in A$ para indicar que a é um elemento do conjunto A. Note que as letras minúsculas são geralmente usadas para indicar elementos dos conjuntos e as maiúsculas para indicar os conjuntos.
- Há muitas maneiras de descrever um conjunto, sendo uma é listando todos os seus elementos, quando possível. A notação usada para indicar todos os membros do conjunto listado é por meio de chaves. Por exemplo, a notação $\{a, b, c, d\}$ representa o conjunto com seus quatro elementos a, b, c e d.

Introdução

Exemplo 1: O conjunto V de todas as vogais do alfabeto da língua inglesa pode ser escrito como $V = \{a, e, i, o, u\}$

Exemplo 2: O conjunto O dos números inteiros ímpares menores que 10 pode ser expresso por $0 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Exemplo 3: Embora os conjuntos sejam normalmente usados para agrupar elementos com propriedades semelhantes, não há nada que impeça um conjunto de ter elementos que não contenham relação alguma. Por exemplo, $\{a, 2, Carlos, São\ Paulo\}$. Algumas vezes as chaves são usadas para descrever um conjunto sem listar todos os seus elementos. Alguns elementos do conjunto são listados e, então, os três pontos (...) são usados quando o modelo geral dos elementos é óbvio.

Exemplo 4: O conjunto de números inteiros positivos menores que 100 pode ser indicado por $\{1, 2, 3, ..., 99\}$.

Introdução

- Outra maneira de descrever um conjunto é usar a notação de **construção do conjunto**, caracterizando todos aqueles elementos do conjunto, estabelecendo a propriedade, ou propriedade, que eles devem ter. Por exemplo, o conjunto O de todos os números inteiros positivos e ímpares menores que 10 pode ser escrito como:

$$O = \{x | x \text{ é um número inteiro positivo e ímpar menor que } 10\}$$

ou especificando o universo do conjunto, como:

$$O = \{x \in \mathrm{Z}^{+} \mid x \text{ é ímpar e } x < 10\}$$

  - Usamos geralmente esse tipo de notação para descrever conjuntos quando é impossível listar todos os seus elementos. Por exemplo, o conjunto Q^{+} de todos os números racionais positivos pode ser escrito como

$$Q^{+} = \{x \in \mathrm{R} \mid \mathrm{x} = p/q\}$$

Introdução

- Os conjuntos a seguir têm um importante papel em matemática discreta:

N $= \{0, 1, 2, 3, ...\}$ - conjunto dos **números naturais**
Z $= \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ - conjunto dos **números inteiros**
$Z^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ - conjunto dos **números inteiros positivos**
Q $= \{p/q \mid$ p $\in$ Z, q $\in$ Z, e q $\neq 0\}$ - conjunto dos **números racionais**
R, - conjunto dos **números reais**

- **DEFINIÇÃO 2**: Dois conjuntos são iguais se e somente se eles têm os mesmos elementos. Ou seja, se A e B são conjuntos, então A e B são iguais se e somente se $\forall$x$(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Escrevemos $A = B$ se A e B forem conjuntos iguais. Exemplo: Os conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{3, 5, 1\}$ são iguais, porque eles têm os mesmos elementos.

Introdução

- Há um conjunto especial que não tem elementos, chamado de **conjunto vazio** ou **conjunto nulo**, sendo indicado por $\varnothing$. O conjunto vazio também pode ser indicado por $\{\}$. Um conjunto com um único elemento é chamado de **conjunto unitário**. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, pois $\{\varnothing\}$ tem um único elemento que é o próprio conjunto vazio.
  - Uma analogia útil para lembrar dessa diferença é pensar em pastas do sistema de arquivos de um computador. O conjunto vazio pode ser entendido como uma pasta vazia e o conjunto que contém apenas o conjunto vazio pode ser pensado como uma pasta com exatamente uma pasta dentro, nesse caso, a pasta vazia.

Introdução

DEFINIÇÃO 3: O conjunto A é um subconjunto de B se e somente se todo elemento de A for também um elemnto de B. Usaremos a notação $A \subseteq$ B para indicar que A é um subconjunto do conjunto B.

- Vemos que $A \subseteq B$ se e somente se a quantificação $\forall$x($x \in A \rightarrow x \in B$) for verdadeira.

Theorem (Teorema 1)

Para todo conjunto S,
(i) $\varnothing \subseteq S$ e (ii) $S \subseteq S$

DEFINIÇÃO 4: Considere S como um conjunto. Se há exatamente n elementos distintos em S, em que n é um número inteiro não negativo, dizemos que S é um *conjunto finito* e que n é cardinal de S. O cardinal de S é indicado por $|S|$.

Exemplo 5

Considere A como o conjunto de números inteiros positivos ímpares menores que 10. Então, $|A| = 5$.

Exemplo 6

Considere S como o conjunto de letras do alfabeto da língua portugueas. Então, $|S| = 26$.

Exemplo 7

Como o conjunto nulo não tem elementos, temos que $|\varnothing| = 0$

DEFINIÇÃO 5: Um conjunto é dito *infinito* se ele não é finito.

Exemplo 8

O conjunto de números inteiros é infinito

O Conjunto das Partes

- Muitos problemas envolvem teste de todas as combinações de elementos de um conjunto para ver se eles satisfazem alguma propriedade. Para considerar todas as combinações de elementos de um conjunto S, construímos um novo conjunto que tem como elementos todos os subconjuntos de S.
    - **DEFINIÇÃO 6**: Dado um conjunto S, o conjunto das partes de S é o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto S, sendo este indicado por $\mathrm{P}(S)$.

Exemplo 9: Qual o conjunto das partes do conjunto $\{0, 1, 2\}$

Solução: O conjunto das partes $\mathrm{P}(\{0, 1, 2\}$ é o conjunto de todos os subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$. Portanto, tem-se:

$\mathrm{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 21\}, \{0, 1, 2\}\}$.

Note que o conjunto vazio e o próprio conjunto são elementos desse conjunto de subconjuntos.

O Conjunto das Partes

- **Exemplo 10**: Qual o conjunto das partes do conjunto vazio? Qual o conjunto das partes do conjunto $\{\varnothing\}$
  - **Solução**: O conjunto vazio tem exatamente um subconjunto, ou seja, ele mesmo, consequentemente, tem-se:

$$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$$

    - Já o conjunto $\{\varnothing\}$ tem exatamente dois subconjuntos, ou seja, $\varnothing$ e o próprio conjunto $\{\varnothing\}$.

Assim, $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Se um conjunto tem n elementos, então o seu conjunto de partes tem 2^n elementos.

Produto Cartesiano

Frequentemente a ordem dos elementos em uma coleção é importante. Como os conjuntos não são ordenados, é necessário uma estrutura diferente para representar coleções ordenadas, sendo determinado pela **n-úpla ordenada**.

- **DEFINIÇÃO 7**: A *n-úpla* ordenada $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é a coleção ordenada que tem a_1 como seu primeiro elemento, a_2 como seu segundo elemento, ... e a_n como seu n-ésimo elemento.
  - Dizemos que duas *n-úplas* ordenadas são iguais se e somente se cada par correspondente de seus elementos é igual. Em outras palavras, $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ se e somente se $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, ..., n$. Em particular, 2-úplas são chamadas de **pares ordenados**. Os pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$.

Produto Cartesiano

- Frequentemente, a ordem dos elementos em uma coleção é importante. Como os conjuntos não são ordenados, é necessária uma estrutura diferente para representar coleções ordenadas, sendo isso determinado pela n-úpla ordenada.
  - **DEFINIÇÃO 8**: Considere A e B como conjuntos. O produto cartesiano de A e B, indicado por $A\text{x}B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), em que $a \in A$ e $b \in B$. Assim, tem-se:
  $$A\text{x}B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
    - **EXEMPLO 11**: Considere A como o conjunto de todos os estudantes em uma universidade e B, como o conjunto de todos os cursos oferecidos por essa universidade. Qual o produto cartesiano de $A\text{x}B$?

Produto Cartesiano

- **EXEMPLO 12**: Qual o produto cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

  Solução: O produto cartesiano de AxB é conforme mostrado abaixo:

  $$\text{AxB} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

  - Um subconjunto R do produto cartesiano AxB é chamado de **relação** do conjunto A com o conjunto B. Os elementos de R são pares ordenados, em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo, a B. Por exemplo, $R = \{(a, 0), (a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 0), (c, 3)\}$ é uma relação do conjunto $\{a, b, c\}$ com o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

  - **NOTA**: Os produtos cartesianos AxB e BxA não são iguais, a menos que $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$ (de modo que Ax$B = \varnothing$) ou $A = B$.

Produto Cartesiano

- **EXEMPLO 13**: Mostre que o produto cartesiano BxA não é igual ao produto cartesiano AxB, em que A e B são os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

  Solução: O produto cartesiano BxA é:

$$B\text{x}A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$
$$A\text{x}B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

  Portanto, $B\text{x}A \neq A\text{x}B$

  - O produto cartesiano dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, indicado por A_1xA_2x ... xA_n, é o conjunto *n-uplas* ordenadas (a_1, a_2, ..., a_n), em que a_i pertence a A_i para $i = 1$, 2, ..., n. Em outras palavras, $A_1\text{x}A_2\text{x} \ldots \text{x}A_n = \{(\mathrm{a}_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A, \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$

Contato

E-mail: cicero@engcomp.uema.br

Website: [url]

Referências

Kenneth H Rosen, *Matemática discreta e suas aplicações*, Grupo A Educaçao, 2009.