MATEMÁTICA DISCRETA
Lógica Proposicional

CÍCERO COSTA QUARTO
Departamento de Engenharia de Computação
Universidade Estadual do Maranhão
https://cicero.engcomp.uema.br

14 de abril de 2026.

Tópicos

- Introdução;
- Argumentos Válidos;
- Regras de Dedução para a Lógica Proposicional;
- Métodos Dedutivos e Outras Regras;
- Argumentos Verbais;
- Exercícios de Aprendizagem.

Introdução

- Você foi convocado a participar do júri em um processo criminal. O advogado de defesa argumenta o seguinte:
  - Se meu cliente fosse culpado, a faca estava na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro, segue que Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos nós sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente.
  - O argumento do advogado está correto? Como você deveria votar?

Introdução

- A alegação do advogado de defesa consiste em um número de declarações (supostamente verdadeiras), seguida de um pedido ao júri para chegar a uma conclusão específica com base nessas declarações.
- Usamos a notação da lógica formal para representar proposições em forma simbólica como fbfs, sendo estas chamadas de **fbfs proposicionais**.
- Vamos agora usar ferramentas da lógica formal para ver como chegar a conclusões a partir de proposições dadas. O sistema formal que usa fbfs proposicionais é chamado de **lógica proposicional**, **lógica declarativa** ou **cálculo proposicional**. (A palavra cálculo é usada aqui no sentido mais geral de "avaliação" ou "raciocínio" e não no sentido de "diferenciação" ou "integração").

Argumentos Válidos

Um argumento pode ser representado em forma simbólica como

$$\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots P_n \rightarrow Q}$$

em que $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ \ldots \ P_n$ são proposições dadas, chamadas de **hipóteses** do argumento, e Q é a conclusão do argumento. Como de hábito, P_i e Q representam fbfs, não apenas letras de proposição. Quando esse deve ser considerado um *argumento válido*? Essa questão pode ser colocada de várias maneiras equivalentes, conforme mostrado abaixo:

Quando Q pode ser deduzida logicamente de P_1, ..., P_n?
Quando Q é uma conclusão lógica de P_1, ..., P_n?
Quando P_1, ..., P_n implica logicamente Q?
Quando Q segue logicamente de P_1, ..., P_n?

assim por diante.

Uma resposta informal é que Q é uma conclusão lógica de P_1, ..., P_n sempre que a verdade das proposições P_1, ..., P_n implicar a verdade de Q. Em outras palavras, quando o condicional

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ \dots \ P_n \rightarrow Q$$

for verdadeiro. (É claro que o condicional será verdadeiro quando qualquer uma das hipóteses for falsa, mas, em geral, em um argumento, preocupa-nos com o que acontece quando todas as hipótese são verdadeiras.) Além disso, esse condicional deverá ser verdadeiro com base na relação entre a conclusão e as hipóteses, e não em conhecimento incidental algum que por ventura tivermos sobre Q.

EXEMPLO 9

Considere o argumento abaixo:

George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos. Thomas Jeferson escreveu a Declaração de Independência. Portanto, todo dia tem 24 horas.

Esse argumento tem duas hipóteses:

1. George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos.
2. Thomas Jeferson escreveu a Declaração de Independência.

e a conclusão é que

Todo dia tem 24 horas.

Argumentos Válidos

- Embora cada hipótese individualmente, assim como a conclusão, seja uma proposição verdadeira, **NÃO** deveríamos considerar esse argumento válido, haja vista que a conclusão é meramente um fato verdadeiro isolado, que não está relacionado, nem "segue de", com as hipóteses;
- Um argumento válido deveria, portanto, ser verdadeiro com base inteiramente em sua estrutura interna, deveria ser "intrinsecamente verdadeiro". Fazemos, então, a seguinte definição formal.

DEFINIÇÃO **ARGUMENTO VÁLIDO**

A fbf proposicional

$$\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots P_n \rightarrow Q}$$

é um **argumento válido** quando for uma tautologia.

O argumento no Exemplo 9 poderia ser simbolizado como

$$A \wedge B \rightarrow C$$

o que evidentemente, não é uma tautologia.

Argumentos Válidos

- Considere o argumento abaixo:
  - Se George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos, então John Adams foi o primeiro vive-presidente. George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos. Portanto, John Adams foi o primeiro vice-presidente.

Este argumento tem duas hipóteses:
1. Se George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos, então John Adams foi o primeiro vice-presidente;
2. George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos.

e a conclusão
John Adams foi o primeiro vice-presidente.
Uma representação simbólica desse argumento tem a forma

$$(A \to B) \wedge A \to B$$

Argumentos Válidos

- Uma tabela-verdade ou o algoritmo Testa Tautologia mostra que esse argumento é uma tautologia. O argumento é válido, pois sua forma é tal que a conclusão segue, inevitavelmente das hipóteses. De fato, essa forma de argumento, conhecida pelo nome em latim ***modusponens*** ("método de afirmar"), é uma das regras de raciocínio que usaremos para construir a lógica proposicional.
- Para testar se $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ ... P_n $\rightarrow$ Q é uma tautologia, poderíamos construir uma tabela-verdade ou usar o algoritmo Testa Tautologia. Entretanto, em vez disso, vamos utilizar a lógica formal, que usa um sistema de **regras de dedução** para manipular fbfs preservando os valores lógicos.
- Podemos começar com as hipóteses P_1, ..., P_n (supostas verdadeiras) e tentar aplicar as regras de dedução de maneira a terminar com a conclusão Q (que, então, tem que ser verdadeira, já que os valores lógicos são preservados sob as regras.

Argumentos Válidos

- **DEFINIÇÃO**: **SEQUÊNCIA DE DEMONSTRAÇÃO**
  - Uma sequência de demonstração é uma sequência de fbfs nas quais cada fbf é uma hipótese ou o resultado de se aplicar uma das regras de dedução do sistema formal a fbfs anteriores na sequência.
  - Para usar a lógica formal a fim de provar que Q é uma conclusão válida de $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ \ldots \ P_n \ \rightarrow$ Q é preciso produzir uma sequência de demonstração da forma que segue abaixo:
    - P_1 (hipótese)
    - P_2 (hipótese)
    - P_n (hipótese)
    - fbfs1, fbfs2 e Q são obtidas aplicando-se uma regra de dedução às suas respectivas fbfs anteriores.

Regras de Dedução para a Lógica Proposicional

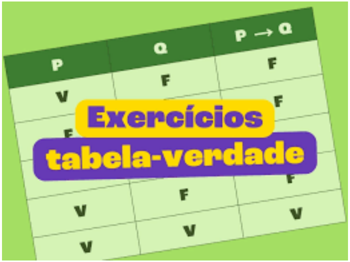
As regras de dedução para a lógica proposicional são basicamente de dois tipos: a) **regras de equivalência** e b) **regras de inferência**. As regras de equivalência permitem que fbfs individuais sejam reescritas, enquanto as regras de inferência permitem a dedução de novas fbfs a partir de fbfs anteriores na sequência de demonstração.

- **Regras de Equivalência**: Dizem que determinados pares de fbfs R e S são equivalentes. Lembrando que $R \Leftrightarrow S$ é uma tautologia e que S pode ser substituída por R em qualquer fbf sem mudança em seu valor lógico.
- A Tabela 1 lista as regras de equivalência que serão usadas no sistema formal de lógica proposicional.

Regras de Dedução para a Lógica Proposicional

Regras de Equivalência		
Expressão	Equivalente a	Nome/Abreviatura para a regra
$P \vee Q$	$Q \vee P$	Comutatividade/com
$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	Comutatividade/com
$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	Associatividade/ass
$(P \wedge Q) \wedge \mathrm{R}$	$P \wedge (Q \wedge R)$	Associatividade/ass
$(P \vee Q)'$	$P' \wedge Q'$	Leis de De Morgan/De Morgan
$(P \wedge Q)'$	$P' \vee Q'$	Leis de De Morgan/De Morgan
$P \rightarrow Q$	$P' \vee Q$	Condicional/cond
P	$(P')'$	Dupla negação/dn
$P \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Definição de equivalência/que

Tabela 1: Regras de Equivalência da Lógica Proposicional [Ger01].



PROBLEMA PRÁTICO 9 [Ger01]

Prove que a regra condicional $(P \to Q) \leftrightarrow (P' \vee Q)$ é uma tautologia.

Exemplo 11 [Ger01]: Suponha que uma hipótese de um argumento proposicional pode ser simbolizada conforme trazida abaixo:

$$(A' \vee B') \vee C$$

Então, uma sequència de demonstração para o argumento poderia começar com os passos seguintes:

1. $(A' \vee B') \vee C$ hip. (hipótese)
2. $(A' \wedge B') \vee C$ 1, De Morgan
3. $(A' \wedge B') \to C$ 2, Cond.

Regras de Dedução para a Lógica Proposicional

- A justificativa dada em cada passo não é uma parte necessária da sequência de demonstração, mas confirma que o passo é legítimo. O passo 1 é uma hipótese. O passo 2 é deduzido do passo 1 usando-se uma das leis de De Morgan. O passo 3 é deduzido do passo 2 usando a regra do condicional, que diz que $P \to Q$ é equivalente a $P' \vee Q$, em que P é a fbf $A \wedge B$ e Q é a fbf C.

> As regras de equivalência permitem substituição em qualquer direção. Por exemplo, no Exemplo 11 houve a substituição da fbf $A' \vee B'$ pela fbf $(A \wedge B)'$, mas, em outra sequência de demonstração usando a mesma regra, poderíamos substituir $(A \wedge B)'$ pela fbf $A' \vee B'$.

Regras de Dedução para a Lógica Proposicional

- **Regras de Inferência**: Dizem que, se uma ou mais fbfs contidas na primeira coluna das regras de inferência fizerem parte de uma sequência de demonstração, então podemos adicionar uma nova fbf na sequência substituindo a(s) anterior(es) pela(s) fbf(s) correspondente(s) na segunda coluna das regras.
- A Tabela 2 mostra as regras de inferência proposicionais que são usadas, junto com seus nomes identificadores.

Regras de Inferência		
De	Podemos Deduzir	Nome/Abreviatura para a regra
P, $P \to Q$	Q	Modus Ponens/P
$P \to Q$, Q'	P'	Modus Tollens/mt
P, Q	$P \wedge Q$	Conjunção/conj
$P \wedge Q$	P, Q	Simplificação/simp
P	$P \vee Q$	Adição/ad
$P \to Q$, $Q \to R$	$P \to R$	Silogismo Hipotético
$P \vee Q$, $\neg P$	Q	Silogismo Disjuntivo

Tabela 2: Regras de Inferência da Lógica Proposicional [Ger01].

Ao contrário das regras de equivalência, as regras de inferência não funcionam em ambas as direções. Não podemos "inverter" a regra de adição, ou seja, de $P \vee Q$ não podemos inferir nem P nem Q.

Regras de Dedução para a Lógica Proposicional

EXEMPLO 12: Suponha que $A \to (B \wedge C)$ e A são hipóteses em um argumento. Uma sequência de demonstração para o argumento poderia começar com os seguintes passos:

1.	$A \to (B \wedge C)$	hip
2.	A	hip
3.	$B \wedge C$	1,2, mp

A justificativa no passo 3 é que os passos 1 e 2 têm exatamente a forma necessária para o *modus ponens*, em que P é A e Q é $B \wedge C$. Modus Ponens diz que Q pode ser inferida de P e de $P \to Q$.

Contato

Figura 1: Cícero Costa Quarto

E-mail: cicero@engcomp.uema.br

Website: [url]

Referências

Judith L Gersting, *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação*, vol. 3, LTC, 2001.