Matemática Discreta
Quantificação Existencial

Cícero C. Quarto
Universidade Estadual do Maranhão
Departamento de Engenharia de Computação
https://cicero.engcomp.uema.br

29 de abril de 2026

Conteúdos

Considerações Iniciais

- Muitas proposições matemáticas dizem que existe um elemento com determinada propriedade, sendo essas proposições expressas usando a quantificação existencial.
  - Com a quantificação existencial, construimos uma proposição que é verdadeira se e somente se $P(x)$ é verdadeira para, pelo menos, um valor no domínio.

Definição Formal da Quantificação Existencial

A quantificação existencial de P(x) é a proposição "Existe um elemento x no domínio tal que P(x)"[Ros09]. Usamos a notação $\exists$xP(x) para a quantificação existencial de P(x). Aqui, $\exists$ é chamado de quantificador existencial.

Nota: Um domínio deve sempre ser especificado quando uma proposição $\exists$xP(x) é usada, pois sem o domínio especificado, a expressão $\exists$xP(x) não tem sentido.

Definição Formal da Quantificação Existencial

- A quantificação existencial $\exists x P(x)$ é lida como:

  "Existe um x tal que P(x)";

  "Existe pelo menos um x tal que P(x)";

  "Para algum x P(x)"

  - No lugar da palavra "existe", podemos também expressar a quantificação existencial de outras maneiras, tais como:

    "para algum", "para pelo menos um" ou "há".

Definição Formal da Quantificação Existencial

Sentença	Quando é verdadeira?	Quando é falsa?
$\forall x P(x)$	P(x) é verdadeira para todo *x*	Existe um x tal que P(x) é falsa
$\exists x P(x)$	Existe um x talque P(x) é verdadeira	P(x) é falsa para todo *x*

Tabela: Significado dos quantificadores [Ros09]

Aplicação

Exercício 1:
Seja P(x) a expressão "$x > 3$". Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x P(x)$ no domínio dos números reais?

Exercício 2:
Seja Q(x) a expressão "$x = x + 1$". Qual o valor-verdade da quantificação $\exists x Q(x)$ no domínio dos números reais?

Definição Formal da Quantificação Existencial

- Em geral, é assumido implicitamente que todos os domínios dos quantificadores são não vazios, pois se o domínio é vazio, então $\exists x Q(x)$ é falsa para toda função proposicional $Q(x)$, uma vez que não há elemento no domínio que valide $Q(x)$.
- Quando todos os elementos do domínio podem ser listados - seja *x1*, *x2*, ..., *xn*, a quantificação existencial $\exists x P(x)$ é a mesma que as disjunção

$$P(x1) \vee P(x2) \vee \ldots \vee P(xn),$$

pois essa disjunção é verdadeira se e somente se pelo menos uma das $P(x1)$, $P(x2)$, ..., $P(xn)$ for verdadeira.

Aplicação

Exercício: Qual o valor-verdade de $\exists x P(x)$, em que P(x) é a proposição "$x^2 > 10$" e o domínio é o conjunto dos inteiros positivos que não excedem 4?

Outras Quantificações

- Agora temos introduzido os quantificadores universal e existencial, sendo os mais importantes quantificadores em matemática e em ciência da computação.
  - Existe um número não limitado de quantificadores que podem definir, tais como "existem exatamente dois", "existem não mais de três", "existem pelo menos 100", e assim por diante, desses outros quantificadores, um dos mais frequente vistos é o **quantificador de unicidade**, indicado por $\exists!$ ou $\exists_1$
    - A notação $\exists! x P(x)$ indica que "Existe um único x tal que P(x) é verdadeira".
    - Outras frases podem ser usadas para a quantificação de unicidade, incluindo "existe exatamente um" e "existe um e somente um".

Prioridade dos Quantificadores

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm prioridade maior que todos os operadores lógicos do cálculo proposicional. Por exemplo, $\forall x P(x) \lor Q(x)$ é a disjunção de $\forall x P(x)$ e $Q(x)$. Em outras palavras, ela significa $(\forall x P(x)) \lor Q(x)$ em vez de $\forall x (P(x) \lor Q(x))$.

Ligando Variáveis

- Quando um quantificador é usado na variável x, dizemos que essa ocorrência da variável é **ligada**. Uma ocorrência de uma variável que não é ligada por um quantificador ou não representa um conjunto de valores particulares é chamada de **variável livre**.
  - Todas as variáveis que ocorrem em uma função proposicional devem ser ligasa ou devem representar um conjunto de valores particulares para ser uma proposição, isso pode ser feito usando uma combinação de quantificadores universais, existenciais ou dando algum valor para as variáveis.
    - A parte da expressão lógica à qual um quantificador é aplicado é chamado de **escopo** do quantificador. Consequentemente, uma variável é livre se ela não está sob o escopo de algum quantificador na fórmula em que aparece essa variável.

Aplicação: Na afirmação $\exists x(x + y = 1)$, a variável x é ligada pelo quantificador existencial, mas a variável y é livre, pois não é ligada a nenhum quantificador, nem assume nenhum valor específico.

Negando Expressões Quantificadas

- Frequentemente vamos querer considerar a negação das expressões quantificadas. Por exemplo, considere a negação da expressão abaixo:

"Todo estudante na sua classe teve aulas de cálculo."

  - Essa expressão é uma quantificação universal, nominalmente, $\forall x P(x)$, onde P(x) é a declaração "*x* teve aulas de cálculo" e o domínio consiste em todos os estudantes de sua classe. A negação dessa proposição é "Não é o caso de todos os alunos de sua classe terem feito aulas de cálculo". Isso é equivalente a "Existe um estudante em sua classe que não teve aula de cálculo".

Negando Expressões Quantificadas

Equivalências lógicas:

$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

$\neg\exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$

Negando Expressões Quantificadas

Negação	**Sentença Equivalente**	**Quando a Negação é Verdadeira**?	**Quando é Falsa**?
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Para todo x, P(x) é falsa	Existe um x para o qual P(x) é verdadeira.

Tabela: **Leis de De Morgan para Quantificadores [Ros09]**

Traduzindo do Português para Expressões Lógicas

- Traduzir sentenças em português (ou outra linguagem natural) para expressões lógicas é uma tarefa crucial em matemática, lógica de programação, inteligência artificial, engenharia de software e muitas outras disciplinas [Ros09].
  - Traduzir do português para expressões lógicas torna-se mais complicado quando quantificadores são necessários, além do mais podem existir muitas maneiras de traduzir uma sentença particular.

Aplicações

- **Exemplo 1**: Expresse a sentença "Todo estudante desta classe estudou cálculo", usando predicados e quantificadores.
  - **Solução**:
    1. Reescrevendo a sentença para identificar claramente qual o quantificador apropriado para usar, fazendo isso, tem=se:
       - "Para cada estudante desta classe, este estudante estudou cálculo."
  - 2. Introduzindo uma variável e a sentença torna-se
       - "Para cada estudante x desta classe, x estudou cálculo."
       - $\forall x C(x)$

Exemplo 2: Se S(x) representa a sentença "x é um estudante desta classe", vemos que nossa sentença pode ser expressa por $\forall$x(S(x) $\rightarrow$ C(x)).

Cuidado! Nossa sentença **NÃO** pode ser expressa por $\forall$x(S(x)$\vee$C(x)), pois essa expressão diz que todas as pessoas são estudantes desta classe e já estudaram cálculo.

- Finalmente, quando estamos interessados em relacionar as pessoas com a matéria cálculo, podemos preferir um predicado com duas variáveis Q(x,y) para a sentença "estudante x estudou a matéria y".

$$\forall x Q(x,\text{cálculo}) \text{ ou } \forall x(S(x) \rightarrow Q(x, \text{cálculo})).$$

Traduzindo do Português para Expressões Lógicas

Exemplo 3 : Expresse as sentenças "Algum estudante da classe visitou o México" e "Todo estudante da classe visitou Canadá ou México"usando predicados e quantificadores.

- "Para algum estudante x da classe, este estudante visitou o México"
  P(x): "x visitou o México";
  $D = \{x1, x2, ..., xn\}$
  Portanto, temos a quantificação $\exists x P(x)$
- "Todo estudante da classe visitou Canadá ou México"
  "Para qualquer estudante x da classe, estes estudantes visitou o Canadá ou México"
  C(x): "x visitou o Canadá"
  Portanto, tem-se a quantificação $\forall x (C(x) \vee P(x))$

Traduzindo do Português para Expressões Lógicas

- No entanto, se no exemplo anterior, o domínio consistisse em todas as pessoas, a sentença poderia ser expressa por:

  "Para cada pessoa x, se x é estudante da classe, então x tem a propriedade de x ter visitado o México ou x ter visitado o Canadá."

  A sentença pode ser expressa por $\forall$x(S(x) $\rightarrow$ (C(x)$\vee$P(x)))

  - Em vez de usar C(x) e P(x) para representar que x visitou o México e x visitou o Canadá, respectivamente, podemos usar um predicado binário V(x,y) para representar "x visitou o pais y."

    Nesse caso, tem-se: V(x, México) e V(x, Canadá). A sentença seria expressa $\forall$x[S(x) $\rightarrow$ V(x,México)$\vee$V(x,Canadá)]

- **Exercício Ilustração**:Use predicados e quantificadores para expressar o sistema de especificações "Todo e-mail com tamanho maior que um megabyte será comprimido" e "Se um usuário estiver ativo, ao menos um link de rede estará habilitado".
  - **Solução** : Seja $S(m,y)$ o predicado "e-mail m tem tamanho maior que y megabyte", em que o domínio de m consiste em todas as mensagens de e-mail e y é um número real positivo, e seja C(m) o predicado "O e-mail m será comprimido". Então, a especificação "Todo e-mail com tamanho maior que um megabyte será comprimido"pode ser representada por $\forall m(S(m,1) \rightarrow C(m))$.

Usando Quantificadores em Sistemas de Especificações

- Seja A(u) o predicado "O usuário u está ativo", em que a variável u tem como domínio todos os usuários, e seja S(n,x) o predicado "O link de rede n está no estado x", em que n tem como domínio todos os links de rede e x tem como domínio os estados possíveis de cada link. Então a especificação "Se um usuário estiver ativo, ao menos um link de rede estará habilitado" pode ser expressa por $\exists u A(u) \rightarrow \exists n S(n, \text{habilitado})$.

Exemplos de Lewis Carroll

Lewis Carroll (pseudônimo de Charles Lutwidge Dodgson), o autor de *Alice no Pais das Maravilhas*, é também autor de muitos trabalhos sobre lógica simbólica. Seu livro contém muitos exemplos de raciocínio usando quantificadores. Os exemplos a seguir são do livro ***Symbolic Logic***.

Exemplos de Lewis Carroll

- **Exemplo 1**: Considere as sentenças. As duas primeiras são chamadas de *premissas* e a terceira é chamada de *conclusão*. O conjunto inteiro é chamado de *argumento*.

  "Todos os leões são selvagens."
  "Alguns leões não bebem café".
  "Algumas criaturas selvagens não bebem cafè".

  - Sejam P(x), Q(x) e R(x) as sentenças "x é um leão", "x é selvagem" e "x bebe café", respectivamente. Assumindo que o domínio consiste em todas as criaturas, expresse as sentenças do argumento usando quantificadores e P(x), Q(x) e R(x).
    - $\forall x(\mathrm{P}(x) \rightarrow \mathrm{Q}(x))$
    - $\exists x(\mathrm{P}(x) \wedge \neg \mathrm{R}(x))$
    - $\exists x(\mathrm{Q}(x) \wedge \neg \mathrm{R}(x))$

Exemplos de Lewis Carroll

- **Exemplo 2**: Considere estas sentenças, das quais as três primeiras são premissas e a quarta é uma conclusão válida.

  "Todos os beija-flores são ricamente coloridos."
  "Nenhum pássaro grande vive de néctar."
  "Pássaros que não vivem de néctar são monótonos nas cores."
  "Beija-flores são pequenos."

  - Sejam $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$ as sentenças "x é um beija-flor", "x é grande", "x vive de néctar" e "x é ricamente colorido", respectivamente. Assumindo que o domínio consiste em todos os pássaros, expresse as sentenças do argumento usando quantificadores e $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ e $S(x)$.
    - $\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$
    - $\neg\exists x(Q(x) \wedge R(x))$
    - $\forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$
    - $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

Contato

E-mail: cicero@engcomp.uema.br

Website: [url]

Referências

Kenneth H Rosen, *Matemática discreta e suas aplicações*, Grupo A Educaçao, 2009.